Problemi di Fisica

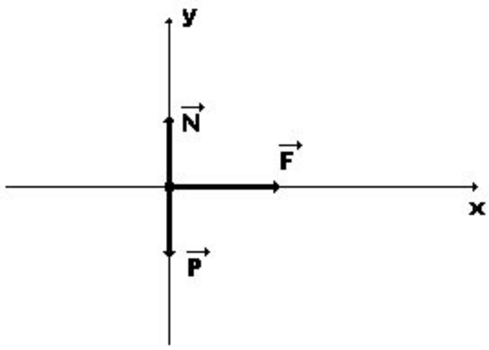
La dinamica

PROBLEMA

Un corpo di massa m=240 kg viene spostato con una forza costante F=130 N su una superficie priva di attrito per un tratto s=2,3 m. Supponendo che il corpo inizialmente è in condizione di riposo, calcolare la velocità finale ed il tempo che impiega per percorrere il tratto s.

SOLUZIONE

Diagramma delle forze



Dalla seconda legge della dinamica ricaviamo l'accelerazione:

$$F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{130}{240} = 0{,}54 m/s^2$$

Poiché si tratta di un moto uniformemente accelerato, applichiamo le relative leggi:

$$\begin{cases} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f = v_0 + at \end{cases}$$ poiché $V_0 = 0$ e $S_0 = 0$ le relazioni diventano: $$\begin{cases} s = \frac{1}{2}at^2 \\ v_f = at \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di due equazioni in due incognite, t e V_f, le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 2{,}9s \\ v = a \cdot \sqrt{\frac{2s}{a}} = 1{,}58 m/s \end{cases}$$

PROBLEMA

Un corpo di massa M = 2 kg si muove con velocità V = 3 m/s. Una forza diretta in senso opposto al moto arresta il corpo dopo un tempo t = 1 s. Calcolare:

- L'intensità della forza applicata
- Lo spazio percorso dall'istante in cui viene applicata la forza

SOLUZIONE

- Applichiamo il 2° principio della dinamica per calcolare la forza che arresta il corpo:

$$F = M \cdot a = 2 \cdot 3 = -6N$$

dove $a = \frac{V_F - V_I}{t} = \frac{-3}{1} = -3m/s^2$

La forza è negativa in quanto si oppone al moto fino ad arrestarlo.

- Poiché si tratta di un moto uniformemente decelerato, lo spazio percorso nel tempo t=1s è dato da:

$$s = V_I \cdot t - \frac{1}{2}at^2 = 3 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1^2 = 1{,}5m$$

PROBLEMA

Un corpo di massa M=10 kg è in moto su un piano orizzontale che presenta un coefficiente di attrito μ=0,2. Se all'istante t tale corpo possiede una velocità di 10 m/s, quanto vale l'intensità della forza che dobbiamo applicare da quell'istante in poi perché il corpo continui a muoversi di moto rettilineo uniforme?

SOLUZIONE

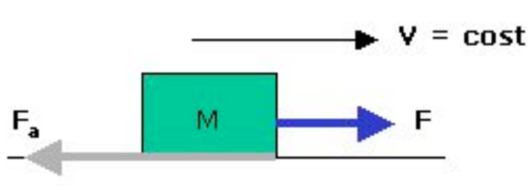
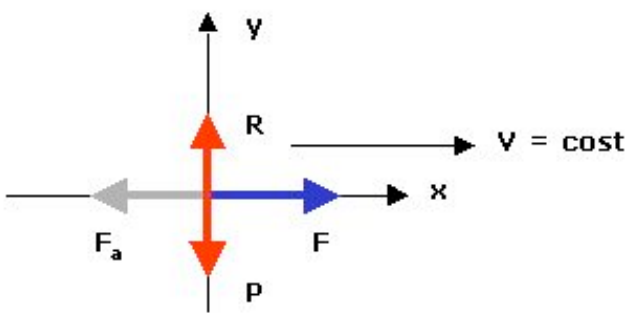


Diagramma delle forze



Il quesito del problema trova la risposta nel:

1° principio della dinamica

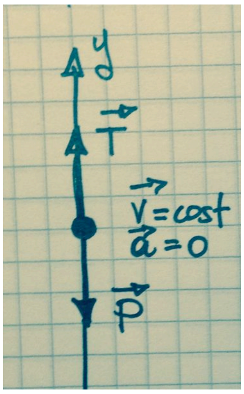
$$V = \cos t \Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F - F_a = 0 \Rightarrow F = F_a = \mu \cdot R = \mu \cdot M \cdot g = 0{,}2 \cdot 10 \cdot 9{,}8 = 19{,}6N$$

PROBLEMA

Un carico di 4 tonnellate viene sollevato da una gru alla velocità costante v=0,5m/s. Tale velocità viene raggiunta in 0,5s. Calcolare la forza a cui è sottoposto il cavo durante la fase di moto a velocità costante e durante la fase iniziale di moto accelerato.

SOLUZIONE

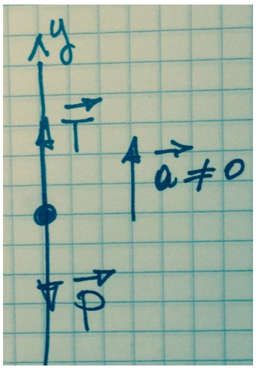
- Fase di moto costante



Durante questa fase l'accelerazione è nulla, per cui il cavo (T=tensione del cavo) deve sopportare solo la forza peso del carico (g=10m/s^2). Pertanto, il secondo principio diventa:

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow T - P = 0 \rightarrow T = P = mg = 4000 \cdot 10 = 40.000\, kg$$

dove: 1 tonnellata=1000kg



- Fase di moto accelerato

Adesso l'accelerazione è diversa da zero, per cui il 2° principio diventa:

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow T - P = ma \rightarrow T = P + ma = mg + ma = m(g+a) = 4000 \cdot (10+1) = 44.000\, kg$$

dove:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0,5}{0,5} = 1\, m/s^2$$

PROBLEMA

Una mongolfiera, di massa 1220 kg, è in equilibrio a circa mezzo metro sopra il terreno. Sale un passeggero e la mongolfiera accelera verso il basso di 0,56 m/s^2. Calcolare la massa del passeggero.

SOLUZIONE

Prima che salga il passeggero, la mongolfiera è in equilibrio, quindi la sua forza peso è controbilanciata dal pallone aerostatico. Quando sale il passeggero, l'equilibrio si rompe e la mongolfiera accelera verso il basso. Pertanto, l'unica forza in gioco è la forza peso del passeggero, la cui massa è ottenuta applicando la seconda legge di Newton scritta in direzione verticale (il moto della mongolfiera è solo verticale):

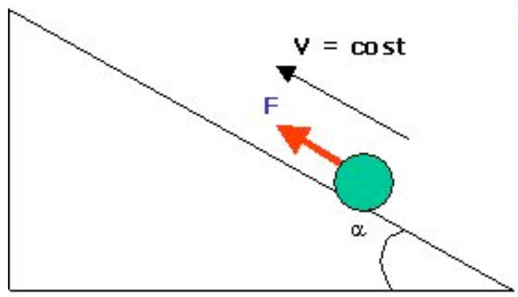
$$\Sigma F_y = ma \rightarrow P_{pass} = (M+m)a \rightarrow mg = (M+m)a \rightarrow m(g-a) = Ma$$

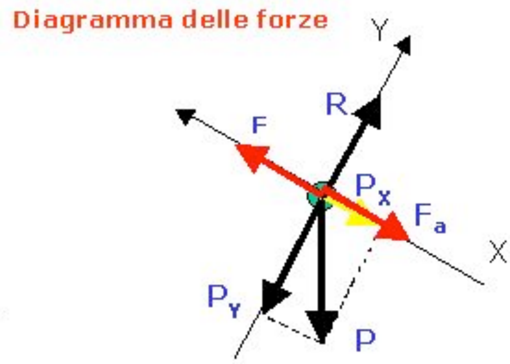
$$m = \frac{a}{g-a} \cdot M = \frac{0,56}{9,81 - 0,56} \cdot 1220 = 74\, kg$$

PROBLEMA

Un corpo di massa M=2 kg viene lanciato verso l'alto lungo un piano inclinato α=30° e con coefficiente di attrito μ=0,4. Determinare la forza che bisogna applicare al corpo affinché il moto lungo il piano inclinato sia uniforme

SOLUZIONE





Il quesito del problema trova la risposta nel:

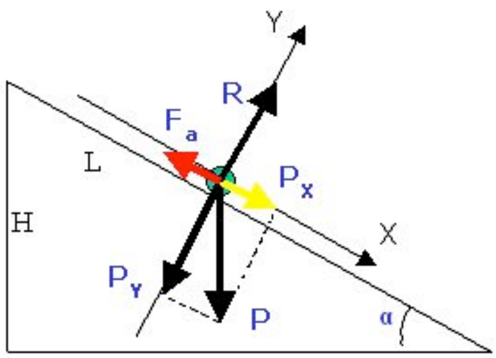
1° principio della dinamica

$$V = \cos t \Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F - F_a - P_x = 0 \Rightarrow F = F_a + P_x = \mu \cdot P_y + P_x = \mu \cdot P \cdot \cos\alpha + P \cdot sen\alpha = P \cdot (\mu \cdot \cos\alpha + sen\alpha) =$$
$$Mg \cdot (\mu \cdot \cos\alpha + sen\alpha) = 2 \cdot 9{,}8 \cdot (0{,}4 \cdot \cos 30° + sen30°) = 16{,}6N$$

PROBLEMA

Un corpo di massa m=0,5 kg scende lungo un piano inclinato alto H=1 m e lungo L=2 m con un'accelerazione costante a=4 m/s². Determina il coefficiente di attrito dinamico tra il piano e il corpo.

SOLUZIONE



Fissato il sistema di assi cartesiani come in figura e disegnate le forze che agiscono sul corpo, possiamo applicare il 2° principio della dinamica che ci permetterà di calcolare il coefficiente di attrito dinamico:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$P_x - F_a = ma \Rightarrow \cancel{m}gsen\alpha - \mu\cancel{m}g\cos\alpha = \cancel{m}a \Rightarrow \mu = \frac{gsen\alpha - a}{g\cos\alpha} = 0{,}1$$

dove:

$$sen\alpha = \frac{H}{L} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30° \quad F_a = \mu \cdot N = \mu \cdot P_y \quad P_x = Psen\alpha = mgsen\alpha \quad P_y = P\cos\alpha = mg\cos\alpha$$

PROBLEMA

Un ciclista di massa m=70kg corre di moto rettilineo uniforme con velocità v=15 m/s. A un certo istante comincia ad agire sul ciclista una forza costante F=200N che ne contrasta il moto. In quanto tempo si ferma e quale spazio ha percorso?

SOLUZIONE

Si tratta di un moto uniformemente accelerato (a negativa), regolato dalle seguenti leggi orarie:

$$\begin{cases} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f = v_0 + at \end{cases}$$

L'accelerazione non è nota, ma possiamo calcolarla dal 2° principio della dinamica (teniamo presente che **F** si oppone al moto):

$$-F = m \cdot a \Rightarrow a = -\frac{F}{m} = -\frac{200}{70} = -2{,}85 m/s^2$$

Quindi, le equazioni del moto diventano:

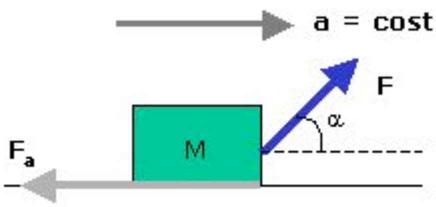
$$\begin{cases} s = 15t - \frac{1}{2} \cdot 2{,}85 t^2 \\ 0 = 15 - 2{,}85t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s = 39{,}5m \\ t = \frac{15}{2{,}85} = 5{,}25s \end{cases}$$

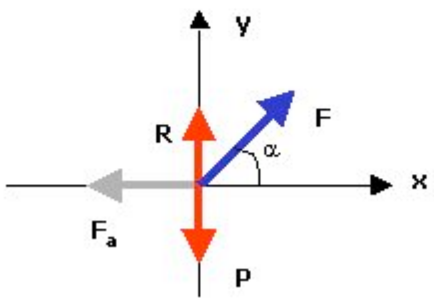
PROBLEMA

Il coefficiente di attrito tra un corpo di massa M=20 kg ed il pavimento è μ=0,2. Calcolare l'accelerazione impressa al corpo da una forza di 100 N inclinata di 60° rispetto all'orizzontale, e la reazione vincolare.

SOLUZIONE

Diagramma delle forze





Il problema viene risolto applicando il secondo principio della dinamica, tenendo conto che si tratta di una equazione vettoriale:

$$\sum \vec{F} = M \cdot \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = M \cdot \vec{a} \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x - F_a = M \cdot a \\ R + F_y - P = 0 \end{cases}$$

Il sistema così ottenuto contiene le due incognite del problema, l'accelerazione a e la reazione vincolare R. Risolto dà le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} R = P - F_y = Mg - F \cdot sen\alpha = 20 \cdot 9{,}8 - 100 \cdot sen60° = 109N \\ a = \dfrac{F_x - F_a}{M} = \dfrac{F \cdot \cos\alpha - \mu \cdot R}{M} = \dfrac{100 \cdot \cos 60° - 0{,}2 \cdot 109}{20} = 1{,}5m/s^2 \end{cases}$$

PROBLEMA

Un automobile avente la massa M=1600 kg percorre 80 m, prima di fermarsi, con una forza frenante costante pari a 6250 N. Calcolare:

1. La velocità dell'automobile all'istante in cui inizia la frenata
2. Il tempo impiegato per fermarsi

SOLUZIONE

Innanzitutto calcoliamo la decelerazione, attraverso il 2° principio della dinamica,subita dalla macchina durante la frenata:

$$\vec{F} = M \cdot \vec{a} \Rightarrow a = \frac{F}{M} = \frac{6250}{1600} = -3{,}9m/s^2$$

Poiché si tratta di un moto uniformemente decelerato, applichiamo le rispettive leggi per rispondere ai quesiti del problema:

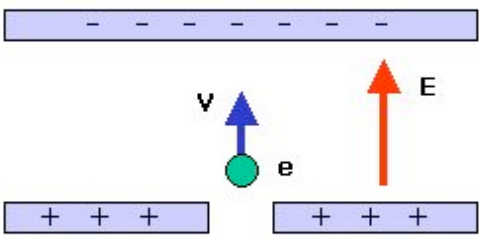
1. $\begin{cases} S = V_0 t - \frac{1}{2}at^2 \\ V_0 = at \end{cases} \Rightarrow S = at^2 - \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 2S = 2at^2 - at^2 \Rightarrow 2S = at^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2S}{a} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80}{3{,}9}} = 6{,}4s$

2. $V_0 = 3{,}9 \cdot 6{,}4 = 25m/s = 90km/h$

PROBLEMA

Un elettrone viene sparato tra due piastre cariche con una velocità $V=2 \cdot 10^6$ m/s. Il campo elettrico tra le due piastre ostacola il moto dell'elettrone con una forza $F=4{,}8 \cdot 10^{-17}$ N. Sapendo che la massa dell'elettrone è $m=0{,}91 \cdot 10^{-30}$ kg, calcolare la distanza percorsa prima di essere arrestato dalla forza elettrica.

SOLUZIONE



Innanzitutto calcoliamo la decelerazione subita dall'elettrone, attraverso il 2° principio della dinamica:

$$\vec{F} = M \cdot \vec{a} \Rightarrow a = \frac{F}{M} = \frac{4{,}8 \cdot 10^{-17}}{0{,}91 \cdot 10^{-30}} = -5{,}3 \cdot 10^{13} m/s^2$$

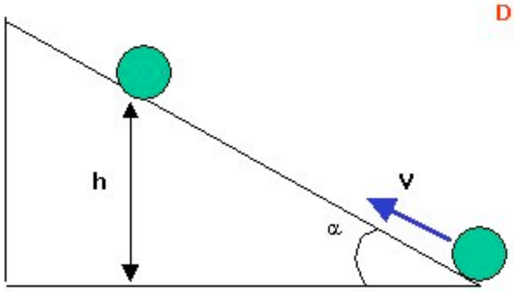
Poiché si tratta di un moto uniformemente decelerato, applichiamo le rispettive leggi per rispondere ai quesiti del problema:

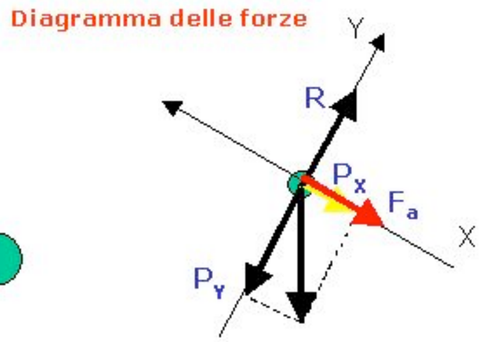
$$\begin{cases} t = \dfrac{V_0}{a} = \dfrac{2 \cdot 10^6}{5{,}3 \cdot 10^{13}} = 0{,}4 \cdot 10^{-7}\,s \\ S = V_0 t - \dfrac{1}{2}at^2 = 2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-7} - \dfrac{1}{2} \cdot 5{,}3 \cdot 10^{13} \cdot (0{,}4 \cdot 10^{-7})^2 = 0{,}04m = 4cm \end{cases}$$

PROBLEMA

Un corpo di massa M viene lanciato lungo un piano inclinato (α=30°) con velocità V=10 m/s. Se l'attrito tra corpo e piano è μ=0,2, determinare a quale altezza h, rispetto all'orizzontale, si ferma il corpo.

SOLUZIONE





Innanzitutto calcoliamo la decelerazione, attraverso il 2° principio della dinamica, subita dal corpo durante il moto lungo il piano inclinato:

$$\sum \vec{F} = M \cdot \vec{a} \Rightarrow -F_a - P_x = M \cdot a \Rightarrow a = \frac{-F_a - P_x}{M} = \frac{-\mu \cdot P_y - P_x}{M} = \frac{-\mu \cdot P \cdot \cos\alpha - P \cdot sen\alpha}{M} = \frac{P \cdot (-\mu\cos\alpha - sen\alpha)}{M} =$$

$$\frac{\cancel{M}g \cdot (-\mu\cos\alpha - sen\alpha)}{\cancel{M}} = -g(\mu\cos\alpha + sen\alpha) = -9{,}8 \cdot (0{,}2 \cdot \cos 30° + sen30°) = -6{,}6 m/s^2$$

Poiché si tratta di un moto uniformemente decelerato, applichiamo le rispettive leggi per calcolare lo spazio percorso:

$$\begin{cases} t = \dfrac{V_0}{a} = \dfrac{10}{6{,}6} = 1{,}5s \\ S = V_0 t - \dfrac{1}{2}at^2 = 10 \cdot 1{,}5 - \dfrac{1}{2} \cdot 6{,}6 \cdot 1{,}5^2 = 7{,}6m \end{cases}$$

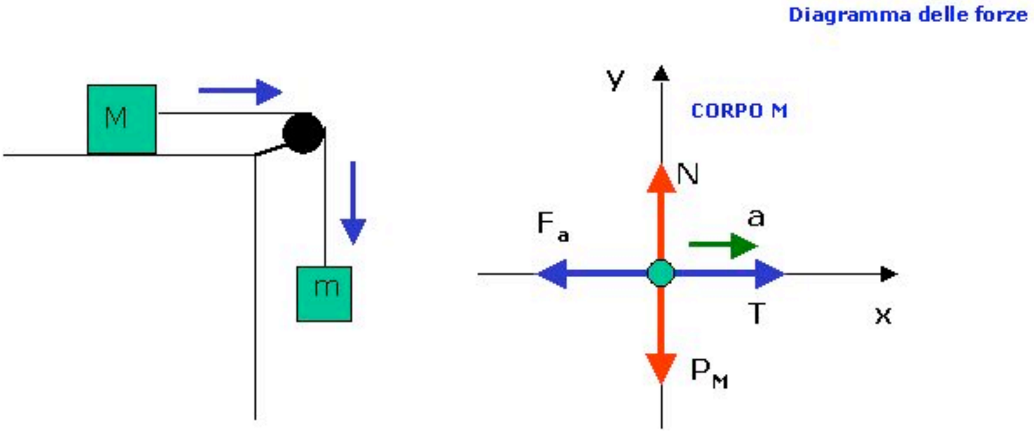
Da considerazioni di carattere trigonometrico calcoliamo l'altezza h alla quale il corpo si ferma:

$$h = S \cdot sen\alpha = 7{,}6 \cdot sen30° = 3{,}8m$$

PROBLEMA

Una massa M=3,3kg si muove su un piano con un coefficiente d'attrito μ=0.3, secondo la direzione indicata in figura, sotto l'azione di una massa m=2,1kg. Nell'ipotesi che la fune sia priva di massa e che la carrucola non introduce nessun attrito, calcolare l'accelerazione e la tensione della corda.

SOLUZIONE



Applichiamo la seconda legge della dinamica ai due corpi, tenendo presente che l'accelerazione è la stessa per le due masse in base alle ipotesi del problema:

$$\textbf{CORPO M} \Rightarrow \sum \vec{F} = M \cdot \vec{a} = \begin{cases} \sum \vec{F}_x = M \cdot a \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T - F_a = M \cdot a \\ N - P_M = 0 \end{cases}$$

$$\textbf{CORPO m} \Rightarrow T - P_m = -m \cdot a$$

Riuniamo le precedenti equazioni in un unico sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} T - F_a = M \cdot a \\ N - P_M = 0 \\ T - P_m = -m \cdot a \end{cases}$$

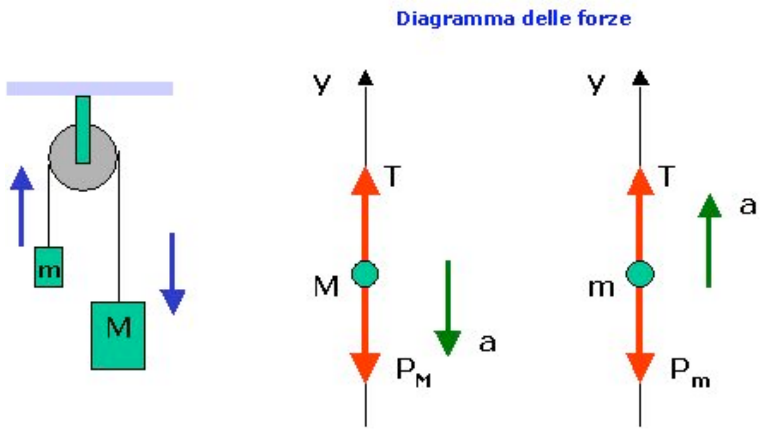
che risolto, darà le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} N = P_M = M \cdot g = 3{,}3 \cdot 9{,}8 = 32{,}3N \\ T = M \cdot a + F_a = 3{,}1 \cdot 2 + 0{,}3 \cdot 32{,}3 = 15{,}9N \\ M \cdot a + F_a - P_m = -m \cdot a \Rightarrow 3{,}3a + 0{,}3 \cdot 32{,}3 - 20{,}6 = -2{,}1a \Rightarrow 5{,}4a = 10{,}9 \Rightarrow a = \dfrac{10{,}9}{5{,}4} = 2m/s^2 \end{cases}$$

PROBLEMA

Dato il sistema di masse in figura, calcolare la loro accelerazione e la tensione della fune, nell' ipotesi che la fune non abbia massa e la carrucola sia priva di attrito.

SOLUZIONE



Applichiamo la seconda legge della dinamica ai due corpi, tenendo presente che l'accelerazione è la stessa per le due masse in base alle ipotesi del problema:

$$\begin{cases} T - P_M = -M \cdot a \\ T - P_m = m \cdot a \end{cases}$$

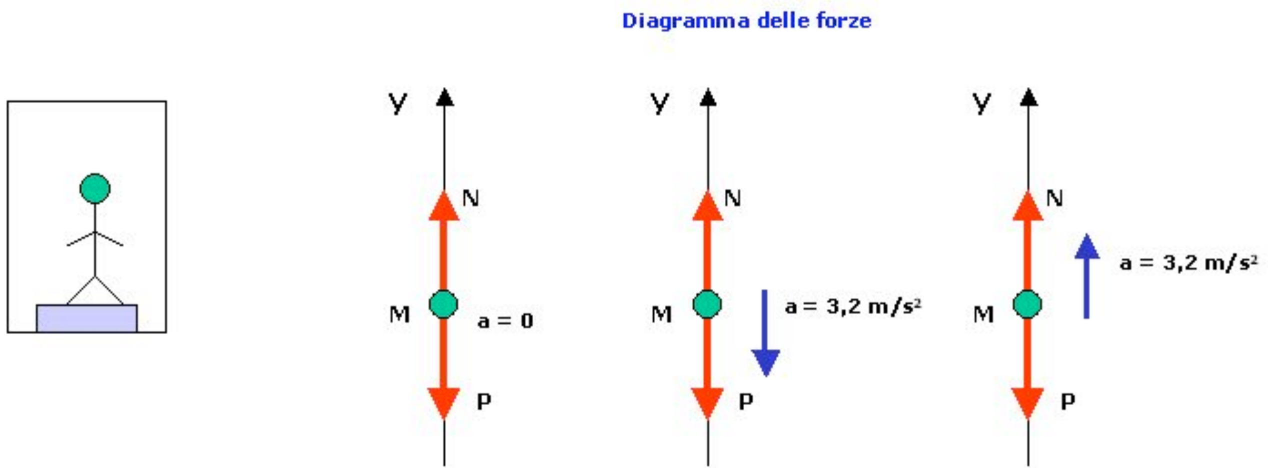
E' un sistema di due equazioni in due incognite, che risolto dà le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} T - Mg = -M \cdot a \Rightarrow T = Mg - Ma = 17\,N \\ Mg - Ma - mg = ma \Rightarrow a \cdot (M + m) = g \cdot (M - m) \Rightarrow a = \dfrac{M - m}{M + m} \cdot g = 3{,}6\,m/s^2 \end{cases}$$

PROBLEMA

Un passeggero di massa m=72.2 kg sta su una bilancia nella cabina di un ascensore. Che cosa segna la bilancia quando l'accelerazione assume i valori dati in figura?

SOLUZIONE



- 1° caso: a = 0

$$N - Mg = 0 \Rightarrow N = Mg = 72{,}2 \cdot 9{,}8 = 708N$$

La bilancia segna il peso effettivo del passeggero

- 2° caso: a = -3,2 m/s^2

$$N - Mg = -Ma \Rightarrow N = Mg - Ma = M \cdot (g - a) = 72{,}2 \cdot (9{,}8 - 3{,}2) = 477N$$

La bilancia segna un peso inferiore di 231 N ed il passeggero pensa di aver dimagrito 23,6 kg (M = P/g= 231/9,8 = 23,6 kg)

- 3° caso: a = 3,2 m/s^2

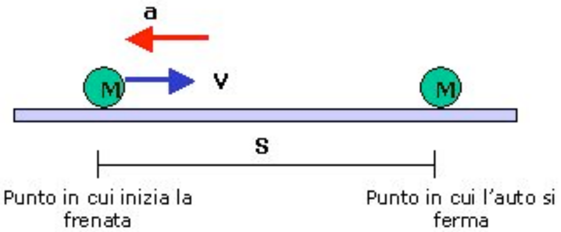
$$N - Mg = Ma \Rightarrow N = M \cdot (g + a) = 72{,}2 \cdot (9{,}8 + 3{,}2) = 939N$$

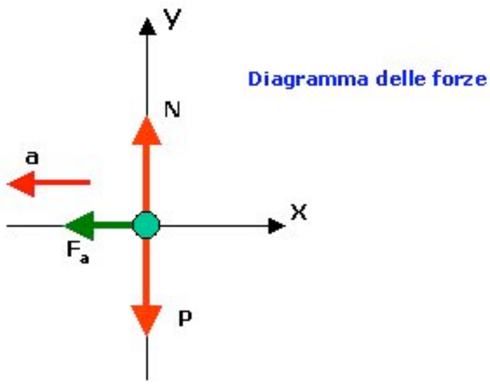
La bilancia segna un peso superiore di 231 N ed il passeggero pensa di aver ingrassato 23,6 kg (M = P/g= 231/9,8 = 23,6 kg)

PROBLEMA

Calcolare la velocità di un'auto nell'istante in cui effettua una frenata, supponendo che la "strisciata" dei pneumatici sull'asfalto sia di 290 m ed il coefficiente di attrito dinamico μ_D=0.60.

SOLUZIONE





Applicando le equazioni del moto uniformemente accelerato si ottiene:

$$\begin{cases} s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 \\ v_f = v_0 - at \end{cases} \Rightarrow V_0 = \sqrt{2as} \qquad \text{essendo } v_f = 0$$

Il valore dell'accelerazione lo ricaviamo applicando il 2° principio della dinamica:

$$-F_a = -Ma \Rightarrow a = \frac{F_a}{M} = \frac{\mu_D \cancel{M} g}{\cancel{M}} = \mu_D \cdot g$$

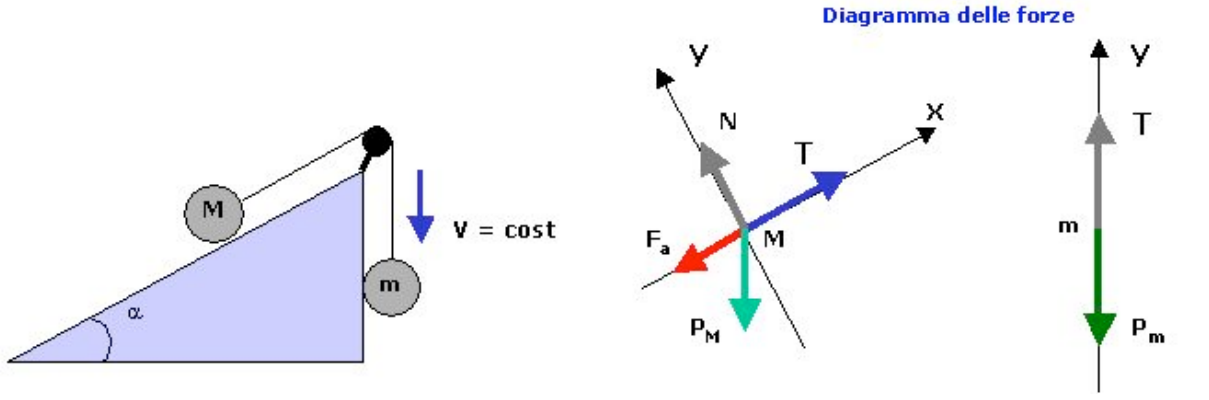
In definitiva:

$$v_0 = \sqrt{2\mu_D \cdot g \cdot s} = 210 Km/h$$

PROBLEMA

Dato il sistema in figura (m=14kg α=30°) calcolare il coefficiente di attrito dinamico tra la massa M ed il piano inclinato nell'ipotesi che le masse si muovano di moto uniforme.

SOLUZIONE



- 2° principio della dinamica applicato alla massa M :

$$\sum \vec{F} = M \cdot \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = M \cdot \vec{a} \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T - F_a - P_x = 0 \\ N - P_y = 0 \end{cases}$$ dove a = 0 perché v = costante

- 2° principio della dinamica applicato alla massa m :

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow T - P_m = 0$$ dove a = 0 perché v = costante

Riuniamo le precedenti equazioni in un unico sistema:

$$\begin{cases} T - F_a - P_x = 0 \\ N - P_y = 0 \\ T - P_m = 0 \end{cases}$$

Sapendo che $P_x = P \cdot sen\alpha$ e $P_y = P \cdot cos\alpha$ il sistema ammetterà le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} T = m \cdot g = 14 \cdot 9{,}8 = 137\text{N} \\ F_a = T - P_x = T - Mg\text{sen}\alpha = 137 - 14 \cdot 9{,}8 \cdot \text{sen}30° = 68\text{N} \\ N = P_y = Mg\cos\alpha = 14 \cdot 9{,}8 \cdot \cos 30° = 119\text{N} \end{cases}$$

Pertanto il coefficiente di attrito dinamico sarà:

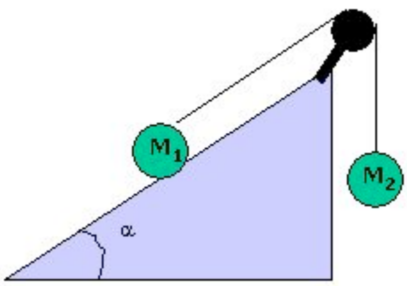
$$F_a = \mu_D N \Rightarrow \mu_D = \frac{F_a}{N} = \frac{68}{119} = 0{,}57$$

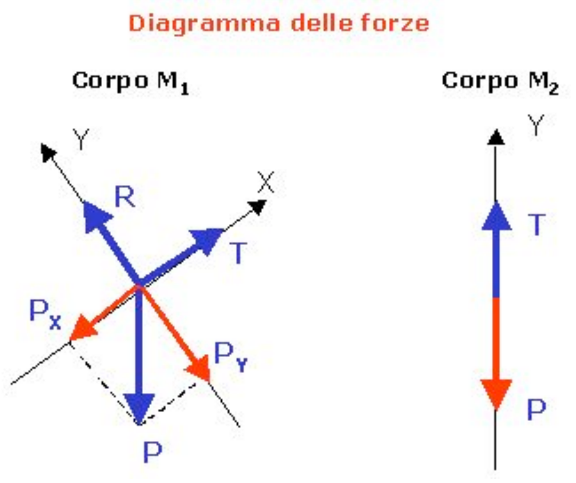
PROBLEMA

Dato il sistema in figura formato dalle masse $M=M_1=M_2=2$ kg e da un piano inclinato ($\alpha=30°$) privo di attrito, determinare:

1. L'accelerazione delle masse
2. La tensione della fune, supposta inestensibile
3. La reazione vincolare del piano inclinato

SOLUZIONE





Il problema viene risolto applicando il secondo principio della dinamica a ciascuna massa e tenendo conto che sono equazioni vettoriali e come tali scomponibili lungo gli assi cartesiani. Inoltre, in base alle ipotesi del problema, l'accelerazione è la stessa per le due masse così come la tensione della fune.

CORPO M_1 $\Rightarrow \sum \vec{F} = M \cdot \vec{a} = \begin{cases} \sum F_x = M \cdot a \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T - P_x = M \cdot a \\ R - P_y = 0 \end{cases}$

CORPO M_2 $\Rightarrow \sum F_y = M \cdot a \Rightarrow T - P = -M \cdot a$

NOTARE: Abbiamo ipotizzato che la massa M_2 si muove verso il basso, ed in base al sistema di riferimento scelto la sua accelerazione è un vettore negativo, e quindi la massa M_1 si muove verso l'alto lungo il piano inclinato, ed in base al sistema di riferimento scelto la sua accelerazione è un vettore positivo.

Riuniamo le precedenti equazioni in un unico sistema, ottenendo così un sistema di tre equazioni in tre incognite, che sono quelle poste come quesito dal problema:

$$\begin{cases} T - P_x = M \cdot a \\ R - P_y = 0 \\ T - P = -M \cdot a \end{cases}$$

Risolviamo il sistema con il metodo di sostituzione, ricavando l'incognita T dalla prima equazione e sostituendola nella terza equazione otteniamo il valore dell'accelerazione:

$$\begin{cases} T = P_x + M \cdot a \\ P_x + M \cdot a - P = -M \cdot a \Rightarrow 2M \cdot a = P - P_x \Rightarrow a = \frac{P - P_x}{2M} = \frac{P - P \cdot \text{sen}\alpha}{2M} = \frac{P \cdot (1 - \text{sen}\alpha)}{2M} = \frac{\cancel{M}g \cdot (1 - \text{sen}\alpha)}{2\cancel{M}} = 2,45 m/s^2 \\ R - P_y = 0 \end{cases}$$

A questo punto le altre incognite sono facilmente calcolabili:

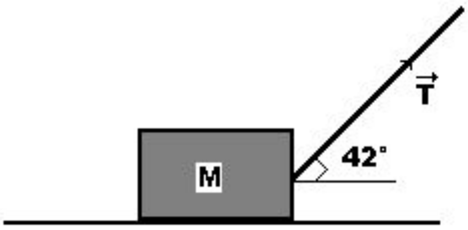
$$\begin{cases} T = P \cdot \text{sen}\alpha + M \cdot a = Mg \cdot \text{sen}\alpha + M \cdot a = M \cdot (g \cdot \text{sen}\alpha + a) = 2 \cdot (9{,}8 \cdot \text{sen}30° + 2{,}45) = 14{,}7 N \\ a = 2{,}45 m/s^2 \\ R = P_y = P \cdot \cos\alpha = Mg \cdot \cos\alpha = 2 \cdot 9{,}8 \cdot \cos 30° = 17 N \end{cases}$$

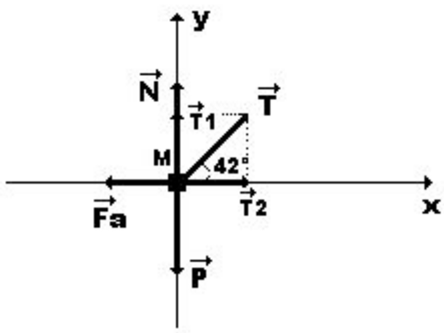
Conclusione: La massa M_2 si muove verso il basso perché il valore trovato, essendo positivo, è in accordo con l'ipotesi fatta.

PROBLEMA

Un corpo di massa M=75kg viene tirato, a velocità costante, con una fune inestensibile con un angolo α=42° rispetto alla direzione di moto. Supponendo che il coefficiente di attrito dinamico è μ_D=0.1, calcolare la tensione della fune.

SOLUZIONE





2° PRINCIPIO DELLA DINAMICA APPLICATO AL CORPO M

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = \vec{0} \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \end{cases}$$ a = 0 perché V = cost

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} T_2 - F_a = 0 \\ N + T_1 - P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \cdot \cos\alpha - F_a = 0 \\ N + T \cdot \text{sen}\alpha - P = 0 \end{cases}$$

dove: $T_1 = T \cdot \sin\alpha$ $T_2 = T \cdot \cos\alpha$ $F_a = \mu_D N = \mu_D Mg$ $P = Mg$

Il sistema, così ottenuto, nelle incognite T e N, ammette le seguenti soluzioni:

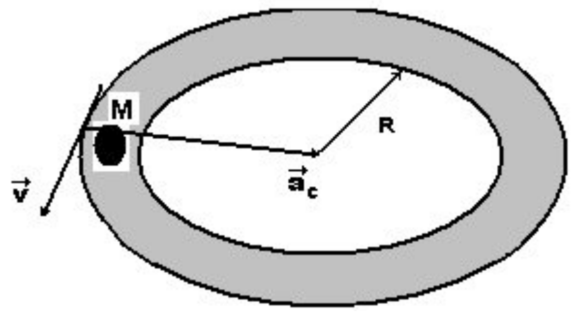
$$\begin{cases} T = \dfrac{\mu_D Mg}{\cos\alpha + \mu_D \text{sen}\alpha} = 91N \\ N = Mg - T\text{sen}\alpha = 670N \end{cases}$$

PROBLEMA

La figura rappresenta un'automobile di massa M=1600kg che viaggia a velocità costante v=20m/s su una pista piana e circolare di raggio R = 190m.

- Qual è il valore minimo del coefficiente di attrito tra i pneumatici ed il terreno che impedisce alla macchina di slittare verso l'esterno?
- Se la curva è sopraelevata, a quale angolo dovrà essere inclinato il fondo stradale per garantire la tenuta di strada senza l'ausilio della forza di attrito?

SOLUZIONE



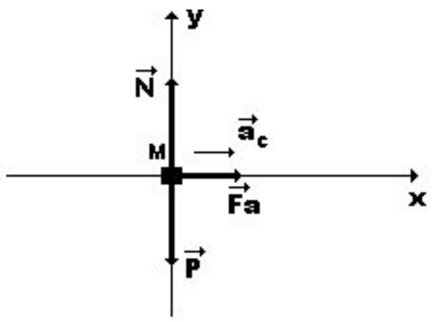
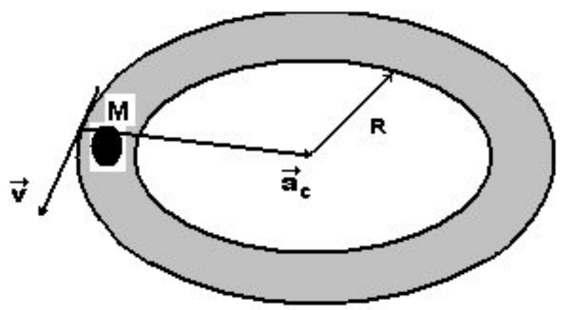
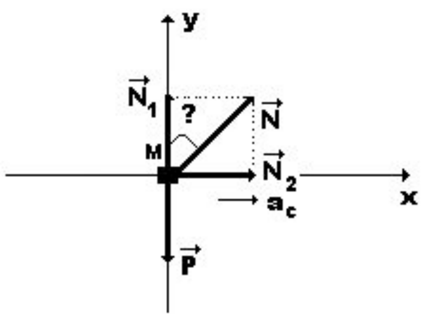


Diagramma delle forze





- **PRIMO CASO**

2° PRINCIPIO DELLA DINAMICA APPLICATO AL CORPO M $\Rightarrow \sum \vec{F} = M \cdot a_c \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = \vec{0} \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_a = M \cdot a_c \\ N - P = 0 \end{cases}$

dove $P = Mg$ $a_c = v^2/R$ $F_a = \mu_D N = \mu_D Mg$

Pertanto:

$$\mu_D \cdot \cancel{M} \cdot g = \cancel{M}\frac{v^2}{R} \Rightarrow \mu_D = \frac{V^2}{g \cdot R} = \frac{20^2}{9{,}8 \cdot 190} = 0{,}21$$

- **SECONDO CASO**

2° PRINCIPIO DELLA DINAMICA $\Rightarrow \sum \vec{F} = M \cdot a_c \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = \vec{0} \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_2 = M \cdot a_c \\ N_1 - P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N \cdot \mathrm{sen}\alpha = M \cdot a_C \\ N \cdot \cos\alpha = M \cdot g \end{cases}$

dove: $N_1 = N \cdot \cos\alpha$ $N_2 = N \cdot \mathrm{sen}\alpha$ $P = Mg$ $a_c = v^2/R$

Dividendo membro a membro le equazioni del sistema, otteniamo:

$$\frac{\cancel{N}\cos\alpha}{\cancel{N}\mathrm{sen}\alpha} = \frac{\cancel{M}g}{\cancel{M}a_c} \Rightarrow \mathrm{ctg}\alpha = \frac{g}{a_c} \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha = \frac{a_c}{g} = \frac{V^2}{g \cdot R} = \frac{20^2}{9{,}8 \cdot 190} = 0{,}21 \Rightarrow \alpha = 12°$$

PROBLEMA

Un veicolo compie un giro della morte su una pista circolare, di raggio R=3 m, disposta in un piano verticale. Qual è la minima velocità che il veicolo deve avere nel punto più alto della pista?

SOLUZIONE

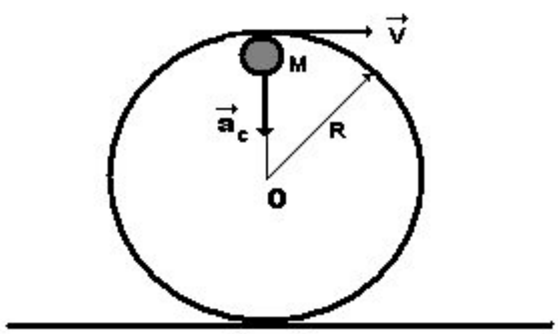
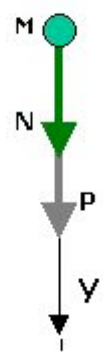


Diagramma delle forze



2° PRINCIPIO DELLA DINAMICA APPLICATO AL CORPO M $\Rightarrow \sum \vec{F} = M \cdot \vec{a} \Rightarrow N + P = M \cdot a_c$

dove P = Mg $a_c = v^2/R$ (accelerazione centripeta)

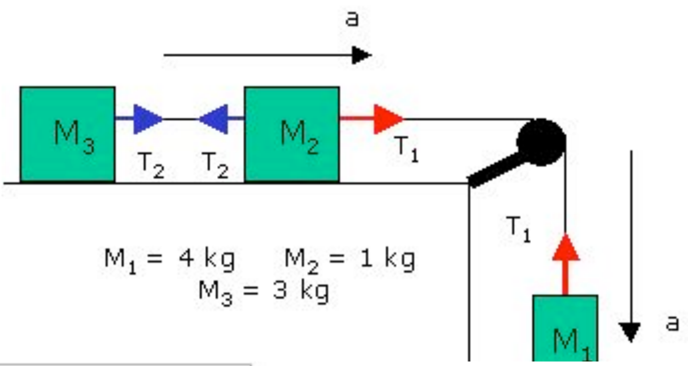
Se il veicolo è nella condizione di perdere contatto con la pista, allora N = 0, per cui la legge diventa:

$$P = M \cdot a_c \Rightarrow \cancel{M}g = \cancel{M}\frac{v^2}{R} \Rightarrow V = \sqrt{g \cdot R} = \sqrt{9{,}8 \cdot 3} = 5{,}4 m/s$$

Per essere certi che il veicolo non perda contatto con la pista nel punto più alto, la velocità deve essere maggiore di 5.4 m/s.

PROBLEMA

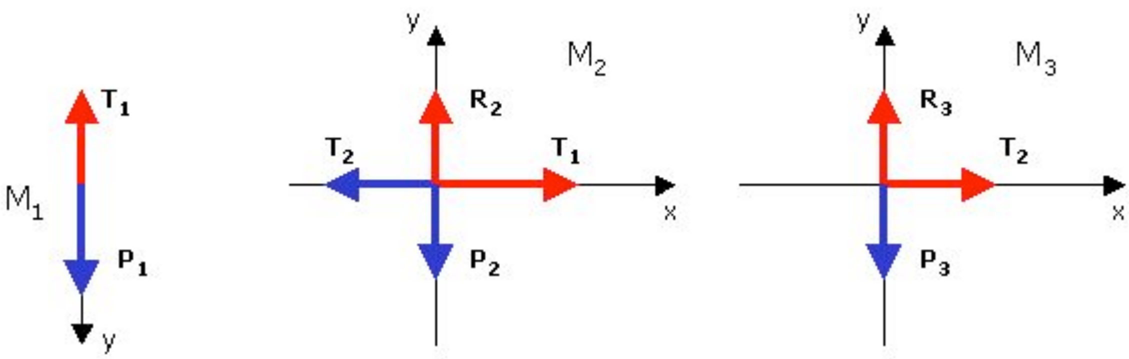
Dato il sistema in figura, calcolare l'accelerazione e le tensioni delle funi.



SOLUZIONE

Disegniamo il diagramma delle forze per ciascun corpo:

Diagramma delle forze



Applichiamo il 2° principio della dinamica a ciascun corpo:

$$M_1 \Rightarrow P_1 - T_1 = M_1 \cdot a$$

$$M_2 \Rightarrow \begin{cases} T_1 - T_2 = M_2 \cdot a \\ R_2 - P_2 = 0 \end{cases}$$

$$M_3 \Rightarrow \begin{cases} T_2 = M_3 \cdot a \\ R_3 - P_3 = 0 \end{cases}$$

Raccogliamo in un unico sistema le equazioni utili ai fini del problema:

$$\begin{cases} P_1 - T_1 = M_1 \cdot a \\ T_1 - T_2 = M_2 \cdot a \\ T_2 = M_3 \cdot a \end{cases}$$

Sommiamo membro a membro le tre equazioni:

$$P_1 - T_1 + T_1 - T_2 + T_2 = (M_1 + M_2 + M_3) \cdot a$$

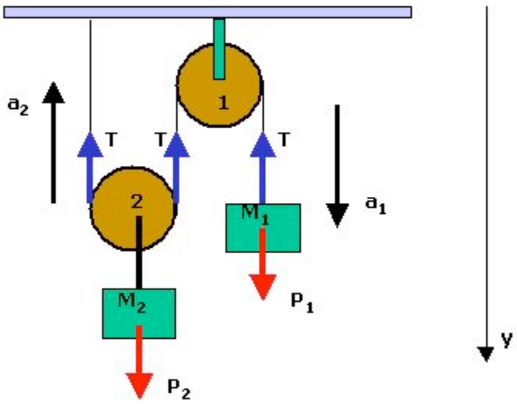
Dall'equazione così ottenuta calcoliamo l'accelerazione delle masse:

$$a = \frac{P_1}{\sum M} = \frac{M_1}{\sum M} \cdot g = \frac{4}{4+1+3} \cdot 9{,}8 = 4{,}9 m/s^2$$

Le tensioni delle funi, di conseguenza, sono:

$$T_1 = P_1 - M_1 \cdot a = M_1 \cdot g - M_1 \cdot a = M_1 \cdot (g - a) = 4 \cdot (9{,}8 - 4{,}9) = 19{,}6N$$
$$T_2 = M_3 \cdot a = 3 \cdot 4{,}9 = 14{,}7N$$

PROBLEMA



Dato il sistema in figura (M_1=3 kg e M_2=4 kg) calcolare:

- le accelerazioni e la tensione delle funi, nell'ipotesi che la fune sia inestensibile e priva di massa e le carrucole non abbiano dimensioni e siano prive di massa;
- la condizione di equilibrio del sistema.

SOLUZIONE

IPOTESI: Sia la massa M_1 a cadere verso il basso. L'ipotesi fatta è ininfluente ai fini della risoluzione del problema.

- Applichiamo il 2° principio della dinamica alle due masse:

$$\begin{cases} P_1 - T = M_1 \cdot a_1 \\ -T - T + P_2 = -M_2 \cdot a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 - T = M_1 \cdot a_1 \\ 2T - P_2 = M_2 \cdot a_2 \end{cases}$$

Notiamo:

- per le ipotesi fatte sulla fune, le tensioni in gioco sono tutte uguali;
- le accelerazioni dei due corpi sono diverse; infatti se M_1 si muove di un tratto ΔL verso il basso, poiché la fune è inestensibile, tale tratto di fune dovrà essere sottratto al tratto di fune che avvolge la carrucola 2. Questo tratto sarà quindi ottenuto prelevando un tratto $\Delta L/2$ a sinistra e a destra della carrucola 2. Allora la velocità $V_1 = \Delta L/\Delta t$ di M_1 è doppia rispetto alla velocità $V_2 = \Delta L/2\,\Delta t$ di M_2 e analogamente per le accelerazioni otteniamo:

$$a_1 = 2 \cdot a_2$$

Fatte queste considerazioni, risolviamo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} P_1 - T = 2M_1 \cdot a_2 \\ 2T - P_2 = M_2 \cdot a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = P_1 - 2M_1 \cdot a_2 \\ 2P_1 - 4M_1 \cdot a_2 - P_2 = M_2 \cdot a_2 \end{cases}$$

La seconda equazione del sistema contiene l'unica incognita a_2:

$$M_2 \cdot a_2 + 4M_1 \cdot a_2 = 2P_1 - P_2 \Rightarrow$$

$$(4M_1 + M_2) \cdot a_2 = 2P_1 - P_2 \Rightarrow a_2 = \frac{2P_1 - P_2}{4M_1 + M_2} = \frac{2M_1 g - M_2 g}{4M_1 + M_2} = \frac{2M_1 - M_2}{4M_1 + M_2} \cdot g = \frac{2 \cdot 3 - 4}{4 \cdot 3 + 4} \cdot 9{,}8 = 1{,}23 m/s^2$$

A questo punto è semplice calcolare a_1 e T:

$$a_1 = 2 \cdot 1{,}23 = 2{,}45 m/s^2 \qquad T = M_1 \cdot g - 2M_1 . a_2 = M_1 \cdot (g - 2a_2) = 3 \cdot (9{,}8 - 2 \cdot 1{,}23) = 22N$$

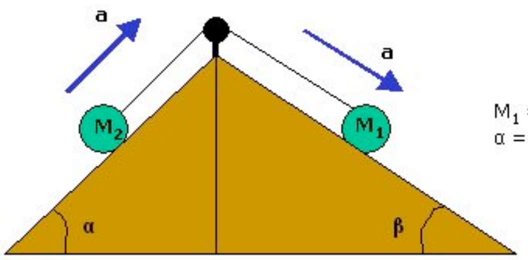
Poiché a_1 è positiva, l'ipotesi fatta è giusta, cioè M_1 cade verso il basso e M_2 si muove verso l'alto. Se a_1 fosse stata negativa, il problema sarebbe stato risolto nello stesso modo, ma avremmo concluso che M_1 si muove verso l'alto e M_2 verso il basso.

- L'equilibrio si ottiene se $a_1 = 0$ cioè:

$$a_1 = 2 \cdot \frac{2P_1 - P_2}{4M_1 + M_2} = 0 \Rightarrow 2 \cdot (2P_1 - P_2) = 0 \Rightarrow 2P_1 = P_2 \Rightarrow 2M_1 \cancel{g} = M_2 \cancel{g} \Rightarrow M_2 = 2M_1$$

PROBLEMA

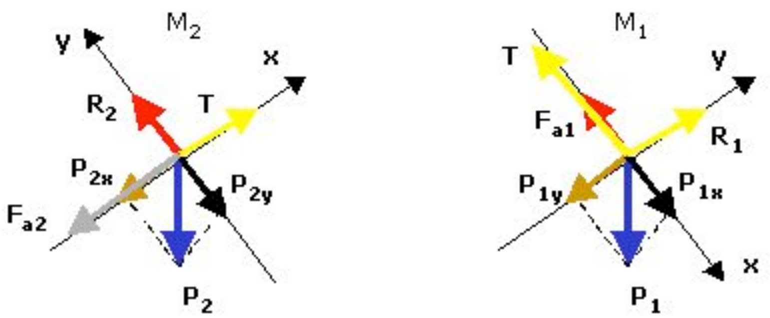
Dato il sistema di masse in figura, calcolare l'accelerazione e la tensione della fune, nell'ipotesi che sia priva di massa ed inestensibile.



$M_1 = 3$ kg $\quad M_2 = 1$ kg $\quad \mu_1 = 0{,}4 \quad \mu_2 = 0{,}2$
$\alpha = 60° \quad \beta = 45°$

SOLUZIONE

Diagramma delle forze



IPOTESI: M_1 scende M_2 sale

Tenendo conto del diagramma delle forze, il 2° principio della dinamica applicato alle due masse diventa:

$$M_1 \Rightarrow \begin{cases} P_{1x} - F_{a1} - T = M_1 \cdot a \\ R_1 - P_{1y} = 0 \end{cases} \qquad M_2 \Rightarrow \begin{cases} T - F_{a2} - P_{2x} = M_2 \cdot a \\ R_2 - P_{2y} = 0 \end{cases}$$

Le equazioni che servono a rispondere ai quesiti del problema sono:

$$\begin{cases} P_{1x} - F_{a1} - T = M_1 \cdot a \\ T - F_{a2} - P_{2x} = M_2 \cdot a \end{cases}$$

Risolviamo il sistema con il metodo di riduzione, per cui, sommando membro a membro le due equazioni otteniamo un'equazione in una sola incognita:

$$P_{1x} - F_{a1} - \cancel{T} + \cancel{T} - F_{a2} - P_{2x} = M_1 a + M_2 a \Rightarrow (M_1 + M_2)\cdot a = P_1 \cdot \text{sen}\beta - \mu_1 \cdot P_1 \cdot \cos\beta - \mu_2 \cdot P_2 \cdot \cos\alpha - P_2 \cdot \text{sen}\alpha \Rightarrow$$

$$(M_1 + M_2)\cdot a = P_1 \cdot (\text{sen}\beta - \mu_1 \cdot \cos\beta) - P_2 \cdot (\mu_2 \cdot \cos\alpha + \text{sen}\alpha) \Rightarrow a = \frac{P_1 \cdot (\text{sen}\beta - \mu_1 \cdot \cos\beta) - P_2 \cdot (\mu_2 \cdot \cos\alpha + \text{sen}\alpha)}{M_1 + M_2} =$$

$$\frac{3 \cdot 9{,}8 \cdot (\text{sen}45° - 0{,}4 \cdot \cos 45°) - 1 \cdot 9{,}8 \cdot (0{,}2 \cdot \cos 60° + \text{sen}60°)}{3+1} = 0{,}75 m/s^2$$

Poiché l'accelerazione è positiva, l'ipotesi fatta è giusta, cioè M_1 cade verso il basso e M_2 si muove verso l'alto. Se a fosse stata negativa, il problema sarebbe stato risolto nello stesso modo, ma avremmo concluso che M_1 si muove verso l'alto e M_2 verso il basso.

Nota l'accelerazione possiamo calcolare dalla prima equazione del sistema la tensione della fune:

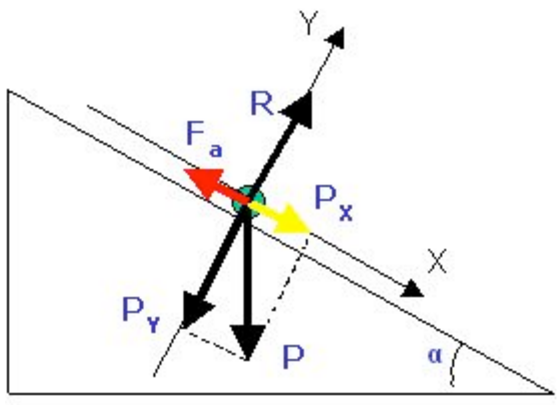
$$T = P_{1x} - F_{a1} - M_1 \cdot a = M_1 g \cdot \text{sen}\beta - \mu_1 \cdot M_1 g \cdot \cos\beta - M_1 \cdot a = M_1 g \cdot (\text{sen}\beta - \mu_1 \cdot \cos\beta) - M_1 \cdot a =$$
$$3 \cdot 9{,}8 \cdot (\text{sen}45° - 0{,}4 \cdot \cos 45°) - 3 \cdot 0{,}75 = 10{,}22 N$$

PROBLEMA

Un corpo di massa M=1kg sia poggiato su un piano inclinato con coefficiente di attrito statico μ_S=0,5 e coefficiente di attrito dinamico μ_D=0,3. Si supponga di sollevare lentamente il piano variando l'angolo α. Calcolare:

- per quale valore di α il corpo comincia a scivolare
- con quale accelerazione il corpo si muove in corrispondenza dell'angolo α

SOLUZIONE



- Un punto materiale è in equilibrio se la somma vettoriale di tutte le forze che agiscono su di esso è nulla:

CONDIZIONE DI EQUILIBRIO

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = \vec{0} \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \end{cases}$$

Utilizziamo la prima equazione per calcolare l'angolo in corrispondenza del quale il corpo comincia a scivolare:

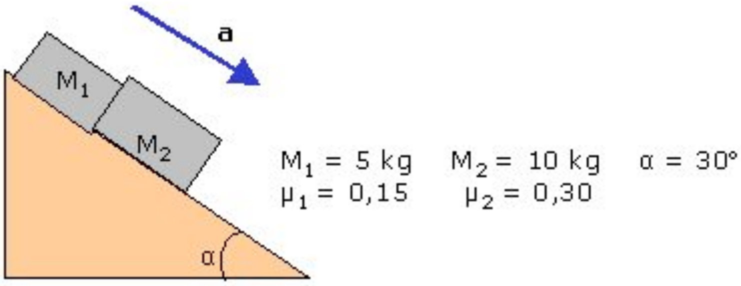
$$P_x = F_a \Rightarrow \cancel{P} \cdot sen\alpha = \mu_S \cdot \cancel{P} \cdot \cos\alpha \Rightarrow \mu_s = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha \Rightarrow tg\alpha = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 27°$$

- Quando il corpo comincia a scivolare, la forza d'attrito diminuisce perché il coefficiente d'attrito diventa quello dinamico, per cui, applicando il 2° principio della dinamica, l'accelerazione si calcola come:

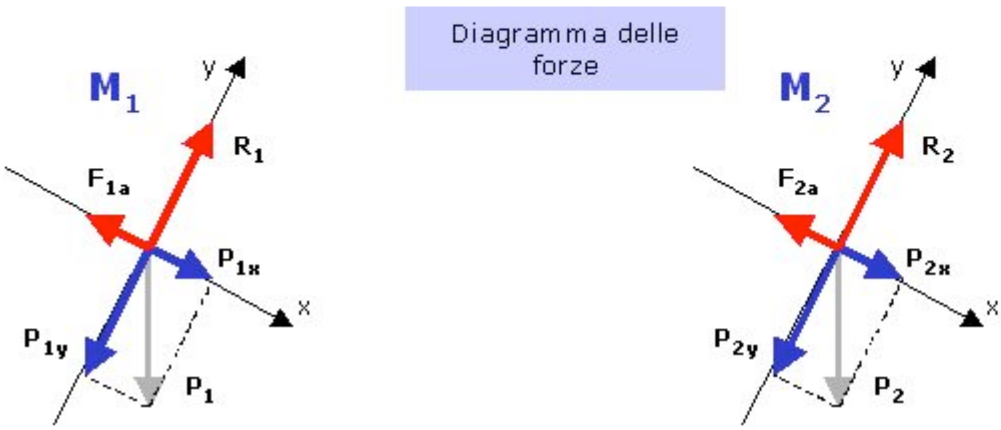
$$P_x - F_{aD} = M \cdot a \Rightarrow a = \frac{P_x - F_{aD}}{M} = \frac{P \cdot sen\alpha - \mu_D \cdot P \cdot \cos\alpha}{M} = \frac{\cancel{M}g \cdot (sen\alpha - \mu_D \cdot \cos\alpha)}{\cancel{M}} =$$
$$9{,}8 \cdot (sen27° - 0{,}3 \cdot \cos 27°) = 1{,}8 m/s^2$$

PROBLEMA

Calcolare l'accelerazione del sistema di masse rappresentato in figura:



SOLUZIONE



Applichiamo il secondo principio della dinamica alle singole masse:

$$M_1 \Rightarrow \sum \vec{F} = M_1 \cdot \vec{a} = \begin{cases} \sum \vec{F}_x = M_1 \cdot \vec{a} \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{1x} - F_{1a} = M_1 \cdot a \\ R_1 - P_{1y} = 0 \end{cases}$$

$$M_2 \Rightarrow \sum \vec{F} = M_2 \cdot \vec{a} = \begin{cases} \sum \vec{F}_x = M_2 \cdot \vec{a} \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{2x} - F_{2a} = M_2 \cdot a \\ R_2 - P_{2y} = 0 \end{cases}$$

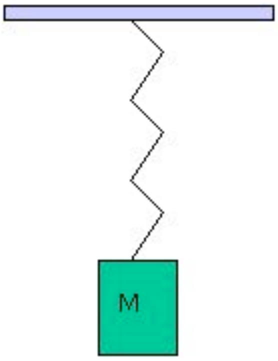
Poiché il corpo M_2 ha una massa ed un coefficiente d'attrito maggiori rispetto al corpo M_1, la forza d'attrito che agisce su M_2 è maggiore rispetto a quella che agisce su M_1, per cui M_2, frenando il moto di M_1, fa sì che il blocco di masse si muova insieme lungo il piano inclinato. Pertanto, sommando membro a membro le prime equazioni dei due sistemi otteniamo un'unica equazione nell'incognita "a":

$$P_{1x} - F_{a1} + P_{2x} - F_{a2} = (M_1 + M_2)\cdot a \Rightarrow a = \frac{P_{1x} + P_{2x} - F_{a1} - F_{a2}}{M_1 + M_2} = \frac{P_1 \cdot \text{sen}\alpha + P_2 \cdot \text{sen}\alpha - \mu_1 \cdot P_{1y} - \mu_2 \cdot P_{2y}}{M_1 + M_2} =$$

$$\frac{P_1 \cdot \text{sen}\alpha + P_2 \cdot \text{sen}\alpha - \mu_1 \cdot P_1 \cdot \cos\alpha - \mu_2 \cdot P_2 \cdot \cos\alpha}{M_1 + M_2} = \frac{P_1 \cdot (\text{sen}\alpha - \mu_1 \cdot \cos\alpha) + P_2 \cdot (\text{sen}\alpha - \mu_2 \cdot \cos\alpha)}{M_1 + M_2} =$$

$$\frac{5 \cdot 9,8 \cdot (\text{sen}30° - 0,15 \cdot \cos 30°) + 10 \cdot 9,8 \cdot (\text{sen}30° - 0,30 \cdot \cos 30°)}{5 + 10} = 2,78 m/s^2$$

PROBLEMA



Calcolare il periodo di oscillazione e la pulsazione di una molla che viene allungata di 0,4 m da una massa di 1 kg.

SOLUZIONE

Le forze in gioco sono la forza elastica e la forza peso, per cui applicando il 2° principio della dinamica calcoliamo la costante elastica della molla che serve per calcolare il periodo di oscillazione:

$$F_e = M \cdot a \Rightarrow -k \cdot x = M \cdot g \Rightarrow k = \frac{M \cdot g}{x} = \frac{1 \cdot 9,8}{0,4} = 24,5 N/m$$

Pertanto:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{24,5}} = 1,3 s \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1,3} = 5 rad/s$$

PROBLEMA

Una strada presenta una curva di raggio R=100 m. Supponendo che il coefficiente di attrito fra le ruote di un'auto e la strada sia μ=0,5, calcolare la massima velocità affinché la curva sia percorsa senza sbandare.

SOLUZIONE

La forza che permette all'auto di percorrere la curva senza sbandare è la forza centripeta, che in questo caso coincide con la forza d'attrito, per cui il 2° principio della dinamica diventa:

$$F_c = M \cdot \frac{V^2}{R} \Rightarrow \mu \cdot \cancel{M}g = \cancel{M} \cdot \frac{V^2}{R} \Rightarrow V = \sqrt{\mu R g} = \sqrt{0,5 \cdot 100 \cdot 9,8} = 22 m/s = 80 km/h$$

PROBLEMA

Un corpo di massa 1 kg si muove di moto armonico con ampiezza 10 cm. Sapendo che il valore massimo dell'accelerazione è 3,94 m/s^2, calcolare la frequenza del moto e la forza agli estremi di oscillazione.

SOLUZIONE

Per calcolare la frequenza del moto armonico ci serve il valore della pulsazione che si calcola attraverso la formula dell'accelerazione del moto armonico:

$$a = -\omega^2 x \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a}{x}} = \sqrt{\frac{3,94}{0,1}} = 6,3 rad/s$$

per cui:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 1 Hz$$

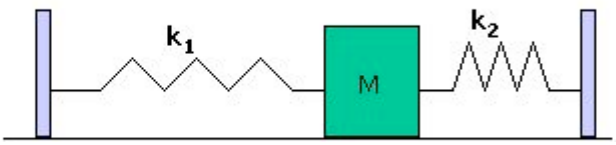
Dal 2° principio della dinamica calcoliamo la forza agli estremi di oscillazione:

$$F = M \cdot a = 1 \cdot 3,94 = 3,94 N$$

PROBLEMA

Un corpo di massa M = 4 kg oscilla sotto l'azione di due molle aventi costanti elastiche K_1 = 200 N/m e K_2 = 150 N/m. Calcolare il periodo di oscillazione del sistema.

SOLUZIONE



Sia durante la fase di compressione che di allungamento di entrambe le molle, la massa M sarà sottoposta sempre a due forze elastiche concordi, per cui il 2° principio della dinamica diventa:

$$F_{1e} + F_{2e} = M \cdot a \Rightarrow -k_1 x - k_2 x = M \cdot a \Rightarrow -(k_1 + k_2) \cdot x = M \cdot a$$

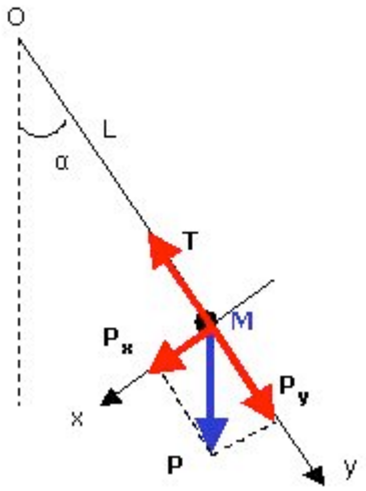
Sapendo che a = $\omega^2 \cdot x$ abbiamo che:

$$-(k_1 + k_2) \cdot \cancel{x} = -M\omega^2 \cancel{x} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M}}$$

per cui l'oscillazione del sistema è:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_1 + k_2}} = \sqrt{\frac{4}{200 + 150}} = 0,67 s$$

PROBLEMA



Un pendolo semplice di lunghezza L = 1 m porta all'estremità una pallina di massa M = 100 g. Quando il filo forma con la verticale un angolo di 45° la pallina ha un'accelerazione centripeta di 4 m/s^2. Calcolare la velocità della pallina e la tensione del filo nella posizione considerata.

SOLUZIONE

Dalla formula dell'accelerazione centripeta calcoliamo la velocità della pallina come formula inversa:

$$a_c = \frac{V^2}{L} \Rightarrow V = \sqrt{a_c \cdot L} = \sqrt{4 \cdot 1} = 2 m/s$$

Dal 2° principio della dinamica calcoliamo la tensione della fune:

$$P_y - T = -M \cdot a_c \Rightarrow T = P_y + M \cdot a_c = Mg \cdot \cos\alpha + M \cdot a_c = M \cdot (g \cdot \cos\alpha + a_c) = 0{,}1 \cdot (9{,}8 \cdot \cos 45° + 4) = 1{,}09 N$$